

Pour envisager sereinement votre année en BCPST1, les exercices ci-dessous doivent pouvoir être réalisés sans difficulté particulière.

1 Calculs

Exercice 1

Simplifier les quantités suivantes, sous forme d'une fraction simplifiée de deux entiers :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{7}{9} - \frac{4}{27} & B &= \frac{7}{9} + \frac{1}{4} & C &= -\frac{8}{9} - \frac{5}{12} & D &= \frac{14}{45} \times \frac{27}{49} \\
 E &= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{8}{3} & F &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} & G &= \frac{1}{5} + \frac{4}{3} \times \frac{7}{5} & H &= \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6} \\
 I &= \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{7}{6} & J &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{15} & K &= \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} & L &= \frac{5}{6} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{14} + \frac{2}{3} \\
 M &= \frac{4}{3} - 2 \times \frac{13+1}{13-1} & N &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \times \frac{10}{7} & O &= \frac{3}{7} \div \frac{4}{21} - \frac{5}{2} & P &= \left(1 + \frac{2}{5} \right) \div \frac{7}{4} \\
 Q &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} & R &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}{\frac{15}{11}} & S &= \frac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{15} - \frac{1}{5}} & T &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

Mettre les expressions suivantes sous forme d'une seule fraction (le numérateur sous forme développée, le dénominateur sous forme factorisée), la plus simplifiée possible :

$$\begin{aligned}
 A &= 5x - 3 + \frac{2x^2 - 7x + 9}{4 - 3x} & B &= -4x + 1 - \frac{9 - 2x}{2x - 5} & C &= 3 + \frac{5}{x - 2} - \frac{3x - 1}{2x + 1} & D &= -1 + \frac{4}{3x - 1} - \frac{5}{x + 2} \\
 E &= 5 - \frac{3}{x + 2} + \frac{5}{(x + 2)^2} & F &= 3 + \frac{1}{2x - 1} - \frac{7}{(2x - 1)^2} & G &= \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} & H &= \frac{2}{x + 1} - \frac{2x - 3}{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} & B &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 & C &= \frac{\frac{1}{5}(1 + \frac{1}{5})}{(1 - \frac{1}{5})^3} + \frac{\frac{1}{5}}{(1 - \frac{1}{5})^2} & D &= \frac{\frac{a^2 + b^2}{b} + 2a}{\frac{1}{a} \frac{1}{b}} \\
 E &= \frac{2}{n(n-1)} \times \left(n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) & F &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} & G &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}} & H &= \frac{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}{-\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} \\
 I &= 2^n + 2^n & J &= (2^{2^n})^{2^n} & K &= 2^{n+1} - 2^n & L &= 2^{2^n} 2^{2^n} \\
 M &= \frac{(2^3 \times 5^7)^{-2}}{(5^2 \times 3^{-3})^3} & N &= \left[\frac{(3 \times 5^2)^{-2} \times 2}{2^{-2} \times 3^3 \times 5^{-3}} \right]^{-3} & O &= \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 \times \left[\left(\frac{3}{5} \right)^{-2} \right]^3 & P &= \left(\frac{-5^2}{2^4} \right)^{-3} \times \left(-\frac{4}{9} \right)^6 \\
 Q &= \frac{(ab^{-1})^3}{c^2 b^{-2}} + \frac{(acb^{-1})^{-2}}{bc^{-2}} \times \frac{(a^3 b)^2}{(cb)^3} & R &= \frac{(a^2 b^{-2})^{-5}}{(c^{-2} b^3)^{-2}} \times \frac{ab - c^{-1}}{c - (ab)^{-1}} & S &= \frac{\ln(\sqrt{ab})}{\ln(a) + \ln(b)} & T &= \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + 2 \ln\left(\frac{a}{1-a}\right) \\
 U &= \frac{\ln(a) + \ln(b) - 1}{\ln\left(\frac{ab}{e}\right)} & V &= \frac{e^{2a}}{(e^a)^2 - \frac{1}{e^{-3a}}} & W &= \frac{(e^a)^b - e^b e^{-a}}{(e^b)^a - \frac{1}{e^a e^{-b}}} & X &= \frac{e^{\ln(2x) + \ln(a)}}{\ln((e^b e^x)^2)}
 \end{aligned}$$

2 Trinômes

Exercice 4

a) Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (4x + 3)(6x + 5)$$

$$B = (-3x + 4)(2x - 7)$$

$$C = (3x - 8)(-4x - 3) + 3(7 - 2x)$$

$$D = (3x - 5)(2x + 4) - 6(7 - x) \quad E = 7x + 5 + (3x - 2)(4x + 6)$$

$$F = -9x + 4 - (5x - 3)(-7x - 2)$$

$$G = 7(3 - 4x) - (x + 6)(2 - 5x) \quad H = (x - 1)(2x + 3) - 2(4x - 5)(6x + 7) \quad I = (x + 4)(2x - 3) - 2(x - 1)(x - 2)$$

b) Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (x + 7)^2$$

$$B = (y - 9)^2$$

$$C = (3x + 5)^2$$

$$D = (2x - 3)^2$$

$$E = (x + 8)(x - 8)$$

$$F = (4x + 5)(4x - 5)$$

$$G = (x - 5)^2 + (3x - 4)(x + 2)$$

$$H = (2x + 3)^2 + 5x(-3x + 4)$$

$$I = (x + 4)(x - 4) - (3x - 7)^2$$

$$J = (3 + 5x)(3 - 5x) - 3(x + 2)(2x - 5) \quad K = (5x + 4)^2 - 2(3x - 1)^2 \quad L = (4x + 3)^2 - 3(5 - x)(2x + 1)$$

Exercice 5

Résoudre les équations en $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$A) -x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$B) 11x - 3x^2 = 22$$

$$C) 50x^2 + 40x + 8 = 0$$

$$D) 3x^2 = 30x - 75$$

$$E) 6x^2 - 19x + 15 = 0$$

$$F) 5x^2 + 13x + 17 = 0$$

$$G) 2(x + 1)(x - 3) + (x - 6)(x - 1) = 0 \quad H) 3x(1 - x) = (1 - 2x)(x - 2) \quad I) x^3 - 2x^2 + x = 0$$

Exercice 6

Résoudre les inéquations en $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$A) x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$B) x^2 - x \geq 5$$

$$C) 5x^2 - 2x < -6$$

$$D) -3x^2 + 15x - 23 \leq 0$$

$$E) -9x^2 + 24x - 16 < 0$$

$$F) \frac{16}{5} + 16x + 20x^2 \leq 0$$

$$G) x^3 + 2x^2 - x > 0$$

$$H) (x - 2)(1 - x) > x(5 - x)$$

$$I) x(x + 3)(2 - x) \geq -x(x - 1)(1 - 2x)$$

Exercice 7

a) Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 5x + 4 \quad B = 6x^2 - 19x + 15 \quad C = 2x^2 - 2x - 1$$

$$D = x^2 - 2x + 1 \quad E = x^2 + 2x + 1 \quad F = x^2 - 1$$

$$G = x^2 + 6x + 9 \quad H = x^2 - 14x + 49 \quad I = x^2 - 25$$

$$J = 9x^2 - 30x + 25 \quad K = 16x^2 + 24x + 9 \quad L = 4x^2 - 25$$

b) Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$A = x^2 - 7 \quad B = 3a^2 + \sqrt{12}ab + b^2 \quad C = a^2 - 16x^2y^2$$

$$D = a^2 + ax + ay + xy \quad E = ab + ay + bx + xy \quad F = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$G = (x + y)^2 + 4(x + y) + 4 \quad H = 9 - 6(a - b)^2 + (a - b)^4 \quad I = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$J = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad K = 1 - 2x^2 + x^4 \quad L = mx^2 - (1 + m^2)x + m$$

3 Inégalités*Exercice 8*Comparer A et B (en discutant si besoin en fonction des valeurs de x). On pourra étudier le signe de $A - B$.

$$a) A = \frac{15}{4} \text{ et } B = \frac{19}{5} \quad b) A = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } B = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad c) A = (2x + 1)(x - 1) \text{ et } B = x^2 - x$$

$$d) A = \ln(x) \text{ et } B = (\ln(x))^2 \quad e) A = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \text{ et } B = \frac{3}{3x^2 + 11x + 6} \quad f) A = \frac{\ln(x)}{1 + \ln(x)} \text{ et } B = \frac{1}{2}$$

4 Étude de fonctions*Exercice 9*

Étudier les fonctions suivantes : domaine de définition, signe, limites, dérivée, tableau de variations, convexité. Tracer l'allure de leur graphe.

$$a) f : x \mapsto x^3 \quad b) f : x \mapsto (x + 1)^2 \quad c) f : x \mapsto x^2 + 1 \quad d) f : x \mapsto \frac{3x+4}{5x-2}$$

$$e) f : x \mapsto \ln(x) - 1 \quad f) f : x \mapsto e^{-2x} \quad g) f : x \mapsto e^x - e^{-x} \quad h) f : x \mapsto e^x + e^{-x}$$

$$i) f : x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} \quad j) f : x \mapsto x \ln(x) \quad k) f : x \mapsto e^{-x^2} \quad l) f : x \mapsto \ln(1 - x^2)$$

Merci de faire part de toute faute, remarque ou erreur de typographie à th.mainguy@gmail.com