

Ce sujet a pour but de vous obliger à revoir les maths de spécialité et d'option maths expertes et nécessite du temps et du travail.

Ce devoir est à rédiger sur des copies doubles à petits carreaux en laissant une première page vide seulement sur la première copie double et une marge à droite (mais pas à gauche) sur toutes les pages. Enfin chaque question est à introduire par un objectif souligné et à terminer par une conclusion encadrée. L'absence de respect d'une de ces quatre consignes sera évidemment sanctionné.

A) Equations et inéquations.

- 1) a) Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $-2x^2 + 9x + 5 = 0$.
 b) En déduire la résolution des deux équations suivantes :
 α) $-2e^{-x} + 9 + 5e^x = 0$
 β) $2\cos^2(x) + 9\sin(x) + 3 = 0$.
- 2) Si m est un réel fixé trouver l'ensemble des réels qui sont solutions de chacune des équations ou inéquations suivantes :
 a) $\ln\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) \leq 0$
 b) $\sqrt{2+x} = 2x+1$
 c) $(m+3)x^2 + 4(m+1)x + 4 = 0$
 d) $|6x^2 + 7x - 2| \leq 3$

B) Suites et fonctions.

Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur \mathbf{R} par $f_n(x) = xe^{nx}$.

- 1) Etudier les variations de f_n sur \mathbf{R} .
- 2) En déduire que, pour tout naturel n , il existe un unique réel x_n solution de l'équation $(E_n) xe^{nx} = 1$.
- 3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante puis établir sa convergence et préciser sa limite.
- 4) Si n est un entier supérieur ou égal à 3 montrer que : $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{\ln(n)}{n}$.
- 5) Si n est un entier supérieur ou égal à 3 montrer que $x_n = -\frac{\ln(x_n)}{n}$ et en déduire que : $\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(\ln(n))}{n} \leq x_n$.
- 6) Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{nx_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$?

C) Intégrales et irrationalité de e.

Pour tout entier naturel n on note : $J_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} dt$.

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{n+1} \leq J_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de J_n quand n tend vers $+\infty$.
- 2) En intégrant par parties, montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$.
- 3) Pour tout entier naturel n on note : $R_n = e(n!) - J_n$.
 a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , R_n est un entier naturel.
 b) Montrer que, si n est un entier supérieur ou égal à 2, J_n n'est pas un entier naturel.
 c) Justifier que J_1 et J_0 ne sont pas non plus des entiers naturels.
 d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $e(n!)$ n'est pas un entier naturel.
- 4) Conclure que e n'est pas un rationnel.

D) Nombres complexes. Dans cette partie les trois exercices 1), 2) et 3) sont indépendants les uns des autres.

- 1) Pour tout complexe z on note $f(z) = z^3 - (4\sqrt{3} + 2i)z^2 + (28 + 8\sqrt{3}i)z - 56i$.
 - a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une solution imaginaire pure c à préciser.
 - b) En déduire pour tout complexe z une factorisation de $f(z)$.
 - c) Trouver les solutions a et b distinctes de c de l'équation $f(z) = 0$ telles que la partie imaginaire de a soit strictement positive.
 - d) Dans le plan complexe de repère orthonormal $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ on note A, B, C les points d'affixes a, b, c et D le milieu de $[AB]$.
 - α) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C et que le triangle ACD est équilatéral.
 - β) En prenant pour unité un centimètre placer le point C et construire géométriquement les points D, A et B .
- 2) a) Rappeler la forme exponentielle des cinq complexes z tels que $z^5 = 1$.
 - b) α) En utilisant la formule du binôme de Newton trouver la forme algébrique du complexe $c = (\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^5$.
 - β) Avec 2) a) en déduire la forme exponentielle des complexes z vérifiant l'équation $(*) z^5 + 64\sqrt{6} - 64\sqrt{2}i = 0$.
- 3) Pour tout entier naturel n on note M_n le point du plan complexe d'affixe $z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}$ dans un repère orthonormé d'origine O .
 - a) Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels z_n est réel.
 - b) Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que le point M_n soit dans le disque de centre O et de rayon 10^{-5} .
 - c) Pour tout entier naturel n montrer que les trois points O, M_n et M_{n+4} sont alignés.

E) Matrices réelles circulantes d'ordre 3.

Pour a, b, c réels on note $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $I = M(0, 0, 1)$, $J = M(0, 1, 0)$ et E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$.

- 1) Pour a, b, c réels constater que $M(a, b, c) = aJ^2 + bJ + cI$ et préciser la matrice J^n en fonction de l'entier naturel non nul n .
- 2) Montrer que la somme et le produit de deux matrices de E sont des matrices de E .
- 3) a) Soient a, b, c, x, y, z des réels. Montrer que : $M(a, b, c)M(x, y, z) = I \Leftrightarrow \begin{cases} cx + by + az = 0 \\ ax + cy + bz = 0 \\ bx + ay + cz = 1 \end{cases}$
 - b) En déduire que l'inverse de toute matrice de E inversible est dans E .
 - c) La matrice $M(1, 2, 1)$ de E est-elle inversible ? Si oui préciser son inverse.
- 4) a) Soient a, b, c, x, y, z des réels et la matrice $M = M(a, b, c)$. Montrer que : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} cx + by + az = 0 \\ ax + cy + bz = 0 \\ (a+b+c)(x+y+z) = 0 \end{cases}$
 - b) Dans cette question seulement on suppose que a, b, c sont des réels tels que $a + b + c = 0$ et $d = c^2 - ab \neq 0$.
Trouver tous les réels x, y, z vérifiant le système du 4) a) et en déduire que la matrice M n'est pas inversible.
 - c) Trouver au moins deux matrices distinctes $M(a, b, c)$ de E non inversibles et telles que les réels a, b, c soient tous distincts.
- 5) Dans cette dernière question u et v sont deux réels strictement positifs et $S = M(u, v, 1 - u - v)$.
Avec 4) b) trouver tous les réels x, y, z tels que $S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

BON TRAVAIL !