Ce sujet a pour but de vous obliger à revoir les maths de spécialité et d'option maths expertes et nécessite du temps et du travail.

Ce devoir est à rédiger sur des copies doubles à petits carreaux en laissant une première page vide seulement sur la première copie double et une marge à droite (mais pas à gauche) sur toutes les pages. Enfin chaque question est à introduire par un but souligné et à terminer par une conclusion encadrée. L'absence de respect d'une de ces quatre consignes sera évidemment sanctionné.

A) Calcul algébrique.

1) Equations et inéquations.

Trouver indépendamment l'ensemble des réels vérifiant les équations et les inéquations suivantes :

- a) $e^{-2x} - e^{-x} - 6 = 0.$
- b) $\ln(4 - 3x) \leq \ln(5 + x).$
- c) $(2 \cos(x) + 1)(4 \cos^2(x) - 3) = 0.$
- d) $|9 - 5x| < 1.$
- e) $\sqrt{3 + x} = 5x - 3.$
- f) $(m + 8)x^2 + mx + 1 = 0,$ où m est un réel fixé.

2) Inégalités.

- a) Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, on a : $\ln(1 + x) + \frac{x^2}{2} \geq x.$
- b) Lequel des deux réels $\frac{10^{30}}{1 + 10^{30}}$ et $1 + 10^{-30}$ est le plus proche de 1 ?

B) Fonction avec paramètre et suites.

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = 2n \left(\frac{\ln(x)}{x^n} \right) + 1.$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

- 1) Montrer que la courbe C_n admet deux asymptotes que l'on précisera et dont on étudiera la position par rapport à la courbe $C_n.$
- 2) Constaté qu'il existe un point A tel que, pour tout entier n non nul, A soit un point de la courbe $C_n.$
- 3) Déterminer les variations de $f_n,$ construire son tableau de variations et vérifier que f_n admet un maximum qui ne dépend pas de $n.$
- 4) Démontrer que, pour tout entier n non nul, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution a_n dans $]0, +\infty[$ puis que a_n est dans $]0, 1[.$
- 5) a) Démontrer que pour tout x dans $]0, 1[$ et tout entier n non nul, $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0.$
 b) En déduire le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geq 1}.$
 c) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 d) En raisonnant par l'absurde montrer que la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est égale à 1.

C) Primitives et intégrales.

1) Pour tout k de $\{1, \dots, 4\},$ trouver une primitive P_k sur $\mathbf{R}$ de la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_1(x) = \frac{x^3}{(2 + x^4)^2}; f_2(x) = 5e^{3x}(e^{3x} + 1)^4; f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 2}; f_4(x) = \sin(x)(\cos(x) - \cos(2x)).$$

2) On considère les trois intégrales $I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}} dt,$ $J = \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}} dt$ et $K = \int_2^3 \sqrt{t^2 - 3} dt.$

- a) Vérifier que : $3I + K = J.$
- b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $K = 3\sqrt{6} - 2 - J.$
- c) Soit f la fonction définie sur $[2, 3]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3}).$
 Justifier que la fonction f est dérivable sur $[2, 3]$ puis préciser sa dérivée.
- d) En déduire la valeur de l'intégrale I puis déterminer les valeurs des intégrales J et $K.$

D) Fonctions définies par une intégrale.

Soient F , G et H les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$, $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$ et $H(x) = G(-x)$.

- 1) Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et préciser $F'(x)$ pour tout réel x .
- 2) a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et de $F(2x)$.
b) En déduire que G est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout réel x , on a : $G'(x) = \frac{3 - 3x^4}{\sqrt{4+x^4} \sqrt{1+4x^4} (\sqrt{4+x^4} + \sqrt{1+4x^4})}$.
- 3) a) Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x , comparer $H'(x)$ et $G'(x)$.
b) En déduire que la fonction G est impaire.
- 4) a) Pour tout réel x positif ou nul, montrer que : $\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
b) En déduire que : $\frac{\sqrt{5}}{10} \leq G(1) \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- 5) Dresser le tableau des variations de G sur $\mathbf{R}$ et y préciser les limites de G en $-\infty$ et $+\infty$ en les justifiant.
- 6) Tracer l'allure de la courbe de G dans un repère orthonormé d'unité deux centimètres en précisant la tangente au point d'abscisse 0.

E) Nombres complexes.

Soient $z = 1 + i$ et, pour tout n de $\mathbf{N}$, $S_n = z^n + \bar{z}^n$.

- 1) a) Déterminer les formes exponentielles de z et de son conjugué $\bar{z}$.
b) Démontrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, il existe un réel strictement positif λ_n à préciser tel que : $S_n = \lambda_n \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$.
 - a) Trouver tous les entiers naturels n tels que : $S_n = 0$.
 - b) Si n est un entier naturel pair montrer que S_n est un entier relatif.
- 2) On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$.
 - a) Utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire $(1+i)^{2p}$ et $(1-i)^{2p}$ avec des puissances de i sans les simplifier.
 - b) Pour un entier naturel q , simplifier $i^{2q+1} + (-i)^{2q+1}$ et $i^{2q} + (-i)^{2q}$.
 - c) Conclure que $\sum_{q=0}^{12} (-1)^q \binom{24}{2q}$ est une puissance de 2 à préciser.

F) Matrices complexes carrées d'ordre 4.

Pour d_1, d_2, d_3, d_4 dans $\mathbf{C}$ on note $D(d_1, d_2, d_3, d_4) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$ et $D_4(\mathbf{C})$ l'ensemble de ces matrices carrées complexes.

- 1) Montrer que le produit de deux matrices de $D_4(\mathbf{C})$ est dans $D_4(\mathbf{C})$.
- 2) En déduire qu'une matrice $D(d_1, d_2, d_3, d_4)$ de $D_4(\mathbf{C})$ est inversible si et seulement si le produit $d_1 d_2 d_3 d_4$ est non nul.
- 3) Soient $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et, pour a, b, c, d dans $\mathbf{C}$, $M = \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$ et f la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par : $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$.
 - a) Montrer qu'il existe une seule matrice $D = D(d_1, d_2, d_3, d_4)$ dans $D_4(\mathbf{C})$ telle que : $MU = UD$.
Exprimer les complexes d_1, d_2, d_3, d_4 trouvés en fonction des valeurs prises par la fonction f en $1, -1, i$ et $-i$.
 - b) On note $c(U)$ la matrice complexe carrée d'ordre 4 dont les seize éléments sont les conjugués des seize éléments de la matrice U .
 - α) Déterminer les deux matrices U^2 et U^4 .
 - β) En déduire que la matrice U est inversible et préciser sa matrice inverse U^{-1} en fonction de la matrice $c(U)$.
 - c) Conclure que la matrice M est inversible si et seulement si, pour tout z de $\{1, -1, i, -i\}$, $f(z)$ est non nul.

BON TRAVAIL !