Consignes de travail pendant l'été

- Les mathématiques en PCSI occupent une place prépondérante (10 heures par semaine : 7h (cours) +3h (TD)) : il est par conséquent indispensable d'avoir une solide maîtrise des connaissances de Première et Terminale pour bien commencer l'année. Par ailleurs, vous devez savoir que la calculatrice est interdite aux épreuves de mathématiques au concours, elle sera donc **interdite** aux devoirs surveillés en mathématiques pendant les deux années de classes préparatoires.
- Il est nécessaire de maîtriser, pour le début de l'année, les points suivants du programme de mathématiques de Première et Terminale :
  - manipulation des nombres complexes (si vous avez suivi l'option Maths Expertes)
  - résolution des équations du second degré,
  - les fonctions usuelles (puissances, logarithme, exponentielle et trigonométriques), et leurs propriétés,
  - les limites et règles de calcul sur les limites : en particulier les limites classiques doivent être connues,
  - les propriétés liées à la continuité, théorème des valeurs intermédiaires,
  - la dérivation : dérivée des fonctions usuelles, application à l'étude de fonctions,
  - le calcul intégral : propriétés de l'intégrale, calcul de primitives usuelles, calcul d'intégrales,
  - manipulation des inégalités : distinction entre $<$ et $\leqslant$, règles de calcul sur les inégalités,
  - connaître parfaitement les formules trigonométriques $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ (il n'y a pas de formulaire en classe préparatoire),
  - la rédaction des raisonnements par récurrence,
- Tous les points précédents seront revus à différentes périodes de l'année (pas nécessairement au début) mais les principales connaissances de Terminale suffiront, au début, pour traiter les questions s'y rapportant dans le cours ou les problèmes.
- **Aucun manuel n'est requis pour le cours de mathématiques.**

Voici un panel d'exercices à chercher avant la rentrée pour vous aider à vous améliorer dans la pratique des calculs. Les notions abordées sont censées être maîtrisées en classe de terminale.

Une évaluation de calcul sur les points abordés dans ce document est prévue les premiers jours de la rentrée.

1. Domaine de définition, dérivation

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction définie par l'expression considérée, déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f, puis calculer f'.

(a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1 + \frac{3}{x}$
(b) $f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$
(c) $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(3x - 1)$
(d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$
(e) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$
(f) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$
(g) $f(x) = \frac{1}{2-\cos(x)}$
(h) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$
(i) $f(x) = (\ln(x))^3$
(j) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$
(k) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$
(l) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$
(m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
(n) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$
(o) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$
(p) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
(q) $f(x) = \frac{-3x^2+4x-1}{x^2+2x+5}$
(r) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x-3})$
(s) $f(x) = \frac{4\cos^2(x)-3}{2\cos(x)}$
(t) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2. Calcul de primitives

Exercice 2. Par reconnaissance de dérivées, déterminez une primitive des fonctions définies par les expressions suivantes :

(1) $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,
(2) $\sin(2t + \pi/5)$,
(3) $1 - 2e^t$,
(4) $\frac{3x^2}{4x^3+1}$,
(5) $\frac{e^x+1}{e^x+x}$,
(6) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
(7) $\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$,
(8) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
(9) $\frac{9x^2+1}{(3x^3+x+1)^3}$,
(10) $x^2\exp(x^3)$,
(11) $\frac{e^x}{e^x+4}$,
(12) $\cos(5x + 3)$,
(13) $x\cos(3x^2)$,
(14) $\frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$
(15) $\tan(x)$,
(16) $\frac{1}{\tan(x)}$

Exercice 3. Déterminer la primitive F de $f$sur I telle que $F(x_0) = y_0$

(1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$,

(2) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$,

(3) $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$,

Exercice 4. Calculer

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle\int_0^2 9t^2\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$

(7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5.

Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez éventuellement besoin d'une intégration par parties.

a) $f(x) = \sin(5x) - 2\cos(3x) + 4\sin(2x)$
b) $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$
c) $f(x) = \sin(x)\cos(x)^3$
d) $f(x) = x\cos(x)$
e) $f(x) = x^2\sin(x)$
f) $f(x) = x^2 e^x$
g) $f(x) = \frac{x}{e^x}$
h) $f(x) = (2x+1)e^x$,
i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
j) $f(x) = x^2\ln(x)$

Exercice 6. Calculer : $2\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$

Exercice 7. Déterminer une primitive de la fonction f définie par (on ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition) :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\cos(x)^2}\,, \quad f(x) = \cos(\frac{x-\pi}{4})\,, \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{5\sqrt{x}}\,, \quad f(x) = \sin(x)\cos(x)^2\,,$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3\,, \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}}\,, \quad f(x) = x\cos(x) + \sin(x)\,, \quad f(x) = x\cos(x^2)\,,$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^3}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,, \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}\,, \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

3. Equations, inéquations

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations ou systèmes d'inconnue x :

(a) $3x^2 - x + 10 < 0$
(b) $x^2 - (3x+5)^2 \leqslant 0$
(c) $\frac{x+1}{x-1} \leqslant x^2 + x - 1$
(d) $(x+1)^3 - x^3 - 1 = 0$
(e) $15x^2 + 14x + 3 \leqslant 0$
(f) $\frac{2x-3}{5x+4} \geqslant 0$
(g) $\left|x^2 - 8x + 1\right| = 4$
(h) $|x+1| = |2x-3|$
(i) $|2-x| < |x+1|$

4. trigonométrie

Exercice 9. Soit x, y des réels. On sait que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ et que $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.
On définit de plus, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) Exprimer en fonction de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$:

$$\cos(x-y)\,, \qquad \sin(x-y)\,, \qquad \tan(x-y)\,,$$
$$\cos(x+\pi)\,, \qquad \sin(x+\pi)\,, \qquad \tan(x+\pi)\,.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,.$$

(2) Exprimer en fonction de $\cos(x \pm y)$ et $\sin(x \pm y)$:

$$\cos x \cos y\,, \qquad \sin x \sin y\,, \qquad \cos x \sin y\,.$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -1$

(3) $\sin(x)\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

(4) $\cos(x) > \frac{1}{2}$

(5) $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Nombres complexes

Exercice 11. Mettre chacun des nombre complexes suivants sous sa forme algébrique

$$i - (3+2i)\,, \quad (5+3i)^2\,, \quad \frac{1}{1-i}\,, \quad \frac{1}{2-3i}\,.$$

Exercice 12. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

(1) $i(5-i)(i-1)$

(2) $(1+i)(1+2i)$

(3) $(5+3i)(5-3i)$

(4) $(1+i)^2$

(5) $(1+i)^4$

(6) $(1+i)^{2000}$

(7) $\frac{1}{i}$

(8) $\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(9) $\frac{3+2i}{i}$

(10) $\frac{i-1}{i+1}$

(11) $\frac{3-5i}{2-i}$

(12) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 13. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et calculer leur module :

$$z_1 = \frac{1}{i}\,, \qquad z_3 = \frac{1+2i}{1-3i}\,, \qquad z_4 = \frac{(2+3i)^2}{4-2i}\,, \qquad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\,, \qquad z_6 = \frac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}\,.$$

Exercice 14. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

(1) $-i$

(2) -7

(3) $\frac{-3}{i}$

(4) $2-2i$

(5) $3i - 3\sqrt{3}$

(6) $(1+i\sqrt{3})^3$

(7) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

(8) $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$

(9) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$

(10) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$

(11) $\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})$

(12) $\sin(\frac{\pi}{12}) + i\cos(\frac{\pi}{12})$

(13) $1 - i\tan(\frac{\pi}{15})$

Exercice 15. Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants (on ne demande pas la forme algébrique) :

$$3-11i\,,\quad 8i\,,\quad i(9+2i)\,,\quad (3+i)(-13-2i)\,,\quad (2+5i)^6\,,\quad (1+i)^3(1-2i)^4\,,$$
$$\frac{2-3i}{8+5i}\,,\quad \frac{i(1-9i)}{(3+7i)^2}\,,\quad \frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}\,.$$

Exercice 16. Soit z un nombre complexe. Sans calculs, justifier que les nombres suivants sont soit réels, soit imaginaires purs :

$$A = z^2+\bar{z}^2\,,\quad B=\frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}\,,\quad C=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}\,.$$

Exercice 17. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-5\,,\quad \frac{2i}{3}\,,\quad -7i\,,\quad 1+i\,,\quad i-1\,,\quad \sqrt{3}+i\,,\quad 1+i\sqrt{3}\,,\quad \sqrt{3}+i\sqrt{2}$$
$$(4+3i)(12-5i)\,,\quad (2-7i)^3\,,\quad \frac{7}{(2-i)^2}\,,\quad \frac{3+i}{4+i}\,,\quad \frac{5+9i}{5-9i}$$

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(1) $iz+2-i=0$
(2) $(3+5i)z=1-z$
(3) $\dfrac{z+1}{z-1}=2i$
(4) $(7-i)\bar{z}+3=0$
(5) $\begin{cases} z-z'=i \\ iz+z'=1 \end{cases}$
(6) $\begin{cases} 2z+z'=1-i \\ z-iz'=0\,. \end{cases}$
(7) $|z|=\left|z^2\right|$.

Exercice 19.

(1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives $a=-1$, $b=3$, $c=1+2i\sqrt{3}$ et $d=7$.

(2) Étudier la nature des triangles ABC et ACD.

Exercice 20. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$, on pose $\alpha=\frac{z-1-i}{z+1}$.

(1) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que α soit réel. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(2) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que α soit imaginaire pur. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(3) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|\alpha|=1$. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.